

女子部中等科2年 数学

「図形について考える」

伊藤洋美

中等科2年の数学では図形について学習する。二等辺三角形の場合、まず「2つの辺が等しい三角形」という定義をし、その定義をもとに論理の積み重ねによって二等辺三角形のいろいろな性質を見出していく。そしてこれらの性質がこの図形についていつでも正しい、つまり任意の二等辺三角形について成り立つこと、例えば「二等辺三角形の2つの底角は等しい」ことを認めるためには、証明を必要とするという立場を数学はとるのである。

そのために、授業では平行線と角との関係から三角形の内角の和が二直角になることを示し、三角形の合同条件を使って図形についての論証に入った。仮定から結論へ、定理の証明や簡単な性質の証明をいろいろ行い、さらに与えられた教科書の問題を発展させ、ある事柄が他の図形の場合でも同じように言えることを確認するという、発展的学習を試みた。以下はその報告である。

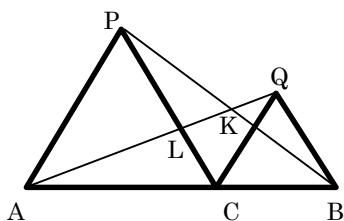
I. はじめに

報告を聞くための予備知識として、次の言葉や内容の説明をした。

証明、仮定、結論、定義、定理、対頂角、内角、外角、合同、3つの合同条件、正三角形・正方形・正多角形の定義

II. 教科書の問題から

問題1. 下の図のように、線分AB上に点Cをとり、AC、BCをそれぞれ1辺とする正三角形ACP、CBQをつくるとき、次の問いに答えなさい。



(1) $AQ=PB$ であることを証明しなさい。

(証明) $\triangle AQC$ と $\triangle PBC$ において、

$\triangle ACP$ は正三角形だから、 $AC=PC$ ①

$\triangle CBQ$ も正三角形だから、 $CQ=CB$ ②

正三角形の1つの内角は 60° であるから、

$\angle ACQ = \angle ACP + \angle PCQ = 60^\circ + \angle PCQ$

$\angle PCB = \angle QCB + \angle PCQ = 60^\circ + \angle PCQ$

よって、 $\angle ACQ = \angle PCB$ ③

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle AQC \equiv \triangle PBC$

したがって、 $AQ=PB$

(終)

(2) AQ と PB の交点を K とすると、 $\angle AKP$ の大きさを求めなさい。

(解法) $\triangle ALC$ と $\triangle PLK$ において、

$\triangle AQC \equiv \triangle PBC$ より、 $\angle QAC = \angle BPC$ ④

対頂角は等しいから、 $\angle ALC = \angle PLK$ ⑤

三角形の内角の和が 180° と④、⑤より、

$\angle ACP = \angle AKP$

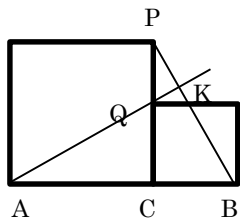
$\angle ACP = 60^\circ$ より、 $\angle AKP = 60^\circ$

(終)

III. 発展問題その1・・・図形を変える

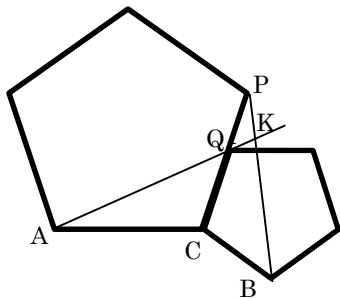
この問題を解いた後、今度は次のように条件の一部を変えた問題を考えた。

問題2. IIの問題1の図形を正三角形の代わりに、下の図のようなAC、BCをそれぞれ1辺とする正方形としたとき、同じように $AQ=PB$ が成り立つか、 AQ の延長と PB との交点を K とすると、 $\angle AKP$ の大きさはいくつか。



証明はⅡの問題1の証明と類似であり、 $AQ=PB$ 、 $\angle AKP=90^\circ$ であることがわかる。

問題3. Ⅲの問題2の図形を正方形の代わりに、AC、BCをそれぞれ1辺とする2つの正五角形について、 $AQ=PB$ が成り立つか、AQの延長とRBとの交点をKとするとき、 $\angle AKP$ の大きさはいくつか。

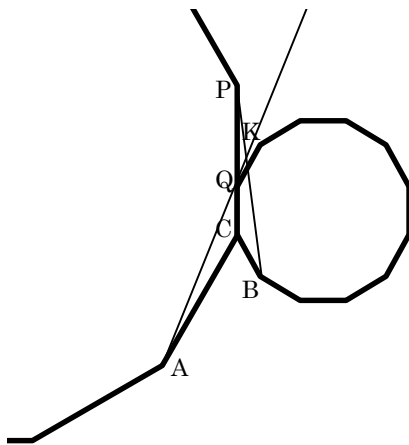


証明はやはりⅡの問題1の証明と類似であり、 $AQ=PB$ 、 $\angle AKP=108^\circ$ であることがわかる。

ここまで考えてくると、一般化された正 n 角形についても次のことが成り立つか、調べたい。

問題4. AC、BCをそれぞれ1辺とする2つの正 n 角形が下の図のように接しているとき、

- (1) $AQ=PB$ が成り立つか。
- (2) AQの延長とPBの交点をKとするとき、 $\angle AKP$ の大きさはいくつになるか。



- (1) (証明) $\triangle ACQ$ と $\triangle PCB$ において、
正 n 角形は辺の長さ、角の大きさがすべて等しいから、
 $AC=PC$ ①
 $QC=BC$ ②
 $\angle ACQ=\angle PCB$ ③
①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle ACQ \cong \triangle PCB$
したがって $AQ=PB$

(終)

- (2) (解法) $\triangle ACQ$ と $\triangle PCK$ において、
 $\triangle ACQ \cong \triangle PCB$ より、 $\angle QAC=\angle BPC$ ④
対頂角は等しいから、 $\angle AQC=\angle PKC$ ⑤
三角形の内角の和が 180° と④、⑤より、
 $\angle ACP=\angle AKP$

正 n 角形の内角の和は、 $180^\circ \times (n-2)$

正 n 角形の1つの内角の大きさは、

$$180^\circ \times (n-2) \div n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{これより、} \angle ACP = \angle AKP = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

(終)

これが正 n 角形の1つの内角の大きさを表していることは、正 n 角形の外角の和が 360° なので、

$$\frac{360^\circ}{n} \text{ は正 } n \text{ 角形の1つの外角の大きさを表す。}$$

180° から1つの外角を引いているので、

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \text{ は正 } n \text{ 角形の1つの内角であること}$$

からもわかる。

このことから、正三角形として出された問題は正多角形どうしの問題に変えても、2つの線分AQとPBの長さは等しく、 $\angle AKP$ の大きさは正多角形の1つの内角

の大きさに等しいことがわかった。

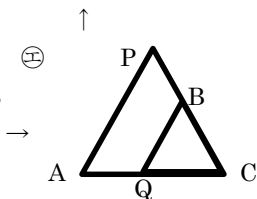
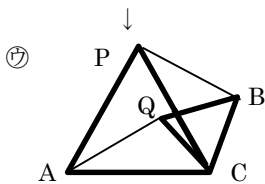
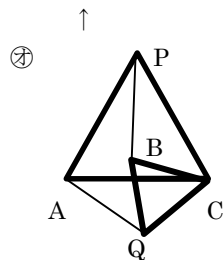
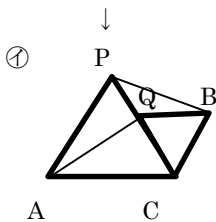
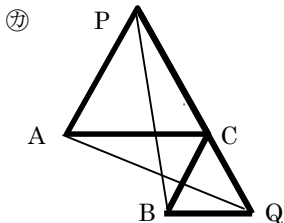
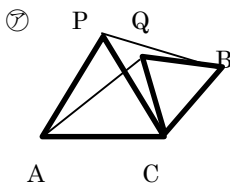
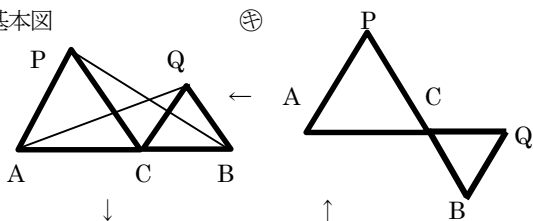
IV. 発展問題その2・・・図形を回転させる

これまでは2つの図形が並んだ場合について考えたが、今度は条件を次のように変えて調べてみた。

問題5. IIの問題1の△CBQを△ACPの点Cを回転の中心として回転移動したとき、AQ=PBが成り立つか、またAQ(またはその延長)とPB(またはその延長)のつくる角の大きさはいくつになるか。

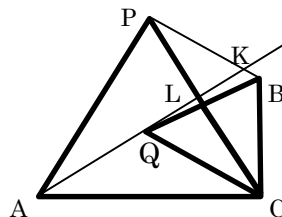
授業では回転移動した図を次の㉗～㉞の7つの場合に向け、それぞれの場合について調べた。

基本図



報告会ではその中の2つの場合㉙、㉚を次のように報告した。

㉙ 下の図について、次のことを証明しなさい。



(1) AQ=PBは成り立つか。

(証明) △QACと△BPCにおいて、

△APCは正三角形だから、AC=PC ①

△CQBも正三角形だから、QC=BC ②

正三角形の1つの内角は60°であるから、

∠ACQ=∠ACP-∠QCP=60°-∠QCP

∠PCB=∠QCB-∠QCP=60°-∠QCP

よって、∠ACQ=∠PCB ③

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、△QAC≡△BPC

したがって、AQ=PB

(終)

(2) AQの延長とPBの交点をKとすると、∠AKPの大きさを求めなさい。

(解法) △ALCと△PLKにおいて、

△QAC≡△BPCより、∠QAC=∠BPC ④

対頂角は等しいから、∠ALC=∠PLK ⑤

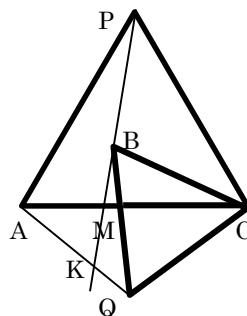
三角形の内角の和が180°と④、⑤より、

∠ACP=∠AKP

∠ACP=60°より、∠AKP=60°

(終)

㉚ 下の図については次のような証明をした。



(1) AQ=PBが成り立つか。

(証明) $\triangle ACQ$ と $\triangle PCB$ において、

$\triangle PAC$ は正三角形だから、 $AC=PC$ ①

$\triangle BQC$ も正三角形だから、 $CQ=CB$ ②

正三角形の1つの内角は 60° であるから、

$\angle ACQ = \angle BCQ - \angle BCA = 60^\circ - \angle BCA$

$\angle PCB = \angle PCA - \angle BCA = 60^\circ - \angle BCA$

よって、 $\angle ACQ = \angle PCB$ ③

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ACQ \equiv \triangle PCB$

したがって、 $AQ=PB$

(終)

(2) AQ と PB の延長との交点を K とするとき、 $\angle AKP$ の大きさを求めよ。

(解法) $\triangle AKM$ と $\triangle PCM$ において、

$\triangle ACQ \equiv \triangle PCB$ より、 $\angle CAQ = \angle CPB$ ④

対頂角は等しいから、 $\angle AMK = \angle PMC$ ⑤

三角形の内角の和が 180° と④、⑤より、

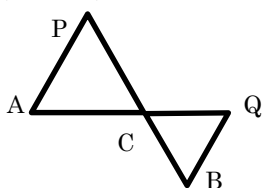
$\angle AKP = \angle ACP$

$\angle ACP = 60^\circ$ より、 $\angle AKP = 60^\circ$

(終)

ここで、報告会では発表しなかったが、授業で㊸や㊹の証明の仕方について質問が多かったので、㊸についても触れてみようと思う。

㊸ 点 A 、 C 、 Q と点 P 、 C 、 B がそれぞれ一直線上に並んだ場合の証明 (下図参考)



(1) $AQ=PB$ が成り立つか。

(証明) $\triangle APC$ 、 $\triangle CQB$ は正三角形だから、

$AC=PC$

$CQ=CB$

点 A 、 C 、 Q と点 P 、 C 、 B はそれぞれ一直線上にあるから、

$AQ=AC+CQ$

$PB=PC+CB$

これより、 $AQ=PB$

(終)

(2) AQ と PB の交点を K とするとき、 $\angle AKP$ の大きさを求めよ。

(解法) AQ と PB の交点 K は点 C に一致する。

正三角形の1つの内角は 60° であるから、

$\angle AKP = \angle ACP = 60^\circ$

(終)

このように、 $\triangle CBQ$ を $\triangle ACP$ の点 C を中心に回転した場合は7種類のどの場合も、 $AQ=PB$ が成り立ち、 $\angle AKP = 60^\circ$ であることがわかった。

V. 発展問題その3・・・図形を変えて回転させる

授業ではさらに正三角形を正方形に、正方形を正五角形にかえて回転移動した場合も証明してみたが、同じように2つの線分 AQ と PB の長さはいつでも等しく、線分 AQ (またはその延長) と PB (またはその延長) のつくる角 ($\angle AKP$) の大きさは正方形の場合は 90° 、正五角形の場合は 108° であった。

このことから正 n 角形が回転移動した場合も同じように、2つの線分 AQ と PB の長さは等しく、線分 AQ (またはその延長) と PB (またはその延長) のつくる角 ($\angle AKP$) の大きさは正 n 角形の1つの内角に等しくなることが予想できる。

VI. 終わりに

図形の証明は複雑なものも多く、やらされているという思いを持つ生徒もいるので、負担の少ない問題はないかと考えていた。今回の授業の流れは、与えられた問題から新しい問題をいろいろ創り出すおもしろさを体験することができ、また証明に使う手法は単純な繰り返しであったにもかかわらず、証明から得られた結果は正多角形のどの図形においても同じことが言えるという美しさがあったので、この題材を選び、授業を組み立てることにした。

数学的な考え方を身に付けていくことを主眼におきながら、自らが主体的に学ぶことのおもしろさを少しでも感じてくれれば幸いである。

VII. 参考文献

「中学校数学2」 「中学校数学2 教師用指導書」

学校図書 平成22年2月10日発行

「数学的思考方」 栗田稔著 啓林館 昭和49年9月