女子部高等科３年　数学
「微分法と積分法ーその考え方の根本にあるものー」

近藤正美

微分の考え方は、「限りなく小さく分ける」ことである。顕微鏡が発明され、自然観が根底からつき崩されたように、数学者は自ら作った「顕微鏡」で無限へとわけ入る世界を手に入れた。しかしそれは物体の顕微鏡ではなく、「思考の顕微鏡」である。私たちは地球の円さを感覚的にとらえることが難しいように、一円玉の端を百倍に拡大したらどのように見えるかを想像することはない。

一方、積分の概念は小さな部分に分けてから足すという「区分求積法」から始まる。それはギリシャ時代に考え出されていたが、実際の計算が大変である。17 世紀になり、ニュートンやライプニッツたちは面積と曲線の方程式の間に或る関係を発見した。それが「微分積分学の基本定理」と呼ばれるものである。それは微分法と積分法の演算が（＋・－や×・÷のように）互いに逆の関係にあるという発見である。

Ⅰ．　はじめに

数学は、ギリシャの昔から哲学者たちの強い関心の的になってきた。それは〈無限〉が数学において、いとも単純にしかも明解に登場するからである。数学の歴史は一面において、人間が数学的無限像を様々に創り変えていく歴史でもあり、しかも〈無限〉の捉え方が変化する毎に “数学” 自身も本質的な脱皮を遂げる。〈無限〉の扱いをめぐって、各時代の数学は固有の規範を形成してきた。その意味で無限論の変遷は数学史そのものである。

新しいことを学ぶ際には、対象となる事柄のイメージをつかむことが大切である。微分法のイメージは、自由落下する物体の「瞬間の速さ」をどうやって求めるかということであり、積分法のイメージは、曲線で囲まれた図形の面積をどうやって求めるかということである。それぞれに必要な発想の源は、既に小学校時代にある。速さ＝（道のり）÷（時間）であり、円の面積の公式は、円を細かく分けてつなぐことから導かれたことである。

高等科において微分法と積分法は、1・2 年での学習を踏まえた中心的な学びである。高等科 3 年の数学はクラスが 2 つに分かれており、担当する教師や進度も違うため、準備を始めた 10 月からは各家族ごとで教えあい、理解するということから始めた。発表内容を決めるときにも、生徒たちそれぞれの工夫が随所に見られた。数学が好きな生徒も苦手な生徒も、共に取り組んだ結果がどのようなものなのかを以下に報告する。

Ⅱ．　報告会への準備

発表の準備は、各家族ごとに教えあい、理解するということから始めた。二人のリーダーがてきぱきと指示を出してくれるので、進め方で苦労することはなかった。教え合う時、どのように言えば相手にわかりやすく伝わるかということを考えざるを得ない。主体的な学習はそのときに始まった。

また、具体的な発表内容を決めるときにも、生徒たちそれぞれの工夫が随所に見られた。分かるということ、また相手に伝わったということを体験するよい機会となった。

Ⅲ．　報告の内容

当日の報告の流れは次のとおり。

微分法

(1) 自由落下を例にして、「平均の速さ」と「瞬間の速さ」について具体的に説明する。それは「瞬間速度」の概念の成立こそが、微分概念の標識であったからである。

(2) 「瞬間の速さ」を定義するときの「極限」という考え方を記号 lim を用いて説明する。

(3) 「平均の速さ」と「瞬間の速さ」の一般化として、それぞれ「平均変化率」と「微分係数」の幾何学的な意味の説明。

ここで接線の傾きは、関数の値が増えたり減ったりする瞬間の状態を表し、直感的に言えば、それ

は曲線も非常に小さな一部を取ってみれば直線とみなすことができるということを視覚的に分かるため、つまり、ある点の近くにおける関数の変化を知るにはその近くで直線、すなわち１次関数に置き換えて考えればよいということを納得するために、私たちは一円玉の端を百倍に拡大したらどのように見えるか、顕微鏡で覗いてみた。
すると、

60 倍
まだ曲がって見える

100 倍
ほとんど直線に見える

(4) 導関数の定義を述べ、微分の計算公式を紹介。
(5) 導関数の利用例として「箱の容積の最大値を見つけること」を説明

積分法
(1) 曲線で囲まれた面積を求める例を提示。

時間 と速さ の関係が $y = x^2$ と仮定して、

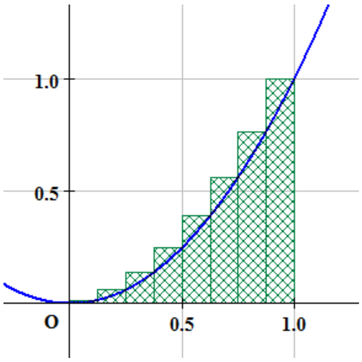
1 秒間に進む距離が曲線 $y = x^2$ と x 軸と直線

$x = 1$ で囲まれた面積になることを示す。

(2) 曲線で囲まれた図形の面積を求めるため、「区分求積法」の考え方を説明する。
【区分求積法】
区間を細かく分割して和の極限として面積や体積を求める方法を「区分求積法」という。
例）曲線 と 軸と直線 で囲まれた面積 を「区分求積法」を用いて計算すると斜線を引いたすべての（n 個の）長方形の面積の総和 S_n は、次のように表される。

$$S_n = \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\times\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$



ここで、１学期に学んだ数列の和の公式を用いて

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

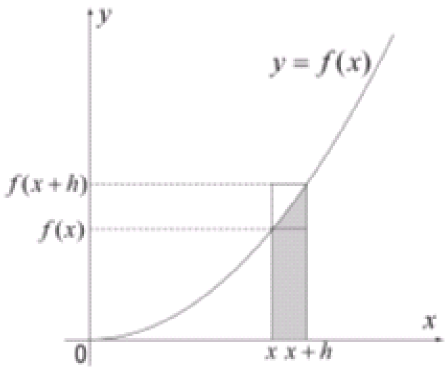
ここで n を限りなく大きくすると（分割を無限に多くすると）

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(2+0+0) = \frac{1}{3}$$

(3)　微分と積分の関係（微分積分学の基本定理）をインテグラルの記号の導入を含めて、説明する。次のように説明した。

(3)　微分と積分の関係（微分積分学の基本定理）をインテグラルの記号の導入を含めて、説明する。次のように説明した。



上図の関係を式で書くと

$$f(x)\cdot h \le S(x+h) - S(x) \le f(x+h)\cdot h$$

全体を h で割ると

$$f(x) \le \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le f(x+h)$$

ここで極限をとると

$$\lim_{h\to 0} f(x) \le \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

すると、 $f(x) \le S'(x) \le f(x)$

ゆえに、 $S'(x) = f(x)$

この関係式は、いったい何を意味しているのだろうか？

「曲線で囲まれた面積 $S(x)$ はまだ分からないが、それを微分すると $f(x)$ になるということである。」

ということは、微分すると $f(x)$ になる関数を見つけることができれば、それが $S(x)$ 。

つまり、曲線で囲まれた面積は、曲線を表す関数 $f(x)$ が分かっていれば、計算することができるということである。このように、微分すると $f(x)$ になる関数のことを の「原始関数」という。

ここで、記号作りの名人と言われたドイツの哲学者ライプニッツが考え出した記号を説明する。

$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n}$ 、 $f(x_i)$ 、 Δx 　がそれぞれ

$\int_a^b$ 　、 $f(x)$ 、　 dx 　に対応し、上で求めた面積 S を $\int_0^1 x^2 dx$ と表す。

(4)具体的な面積を求める（放物線）

さきほど「区分求積法」で求めた曲線 $y = x^2$ と x 軸と直線 $x = 1$ で囲まれた面積 S が $\int_0^1 x^2 dx$ であることが、「原始関数」の考え方を用いると、

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

と、簡単に求まることを説明する。

IV.　終わりに

生徒たちが学んだ微分や積分は、具体的には、物体の落下運動や太陽の周りをまわる惑星の運動の問題など、変化し、運動しているものについての研究から生まれてきた計算方法である。

細かく分けていって調べるという微分の考え方、細かく分けていったものをもう一度つなぎ合わせると言う積分の方法。それら解析と総合という２

つの思考法が、互いに逆の計算法であることが発見された。そして、そのことが微分積分学の決定的なモメントになった。

私は、授業のはじめに次のように話した。

「たとえば君たちが自動車の運転をしているとしよう。目の前にはスピードメーターがある。メーターが時速 100km を指していたとすれば、「あ！メーターが微分している（つまり、いま瞬間の速さが示されている）」と思えるようになってほしい」と。

それは「瞬間速度」の概念の成立こそが、微分概念の標識であったからである。平均速度から瞬間速度を考えるとき、時間を限りなく０に近づけるという操作をする。そこにでてくる極限の概念は、直感的にはなんとなく分かったつもりになるが、突き詰めて考えるとなかなか難しい概念である。それを、驚きをもって視覚的に納得する方法が、１円玉の端を顕微鏡で覗くことであった。100倍に拡大すると、円周の一部は確かに直線になっていることが分かる。一方、積分の概念はギリシャ時代、図形の面積や体積を小さな部分に分けてから足すという「区分求積法」から始まった。やがて 17 世紀になり、微分法と積分法の演算が（＋・－や×・÷のように）互いに逆の関係にあることが発見される。ここをしっかりと理解してもらうことがポイントであった。

Ⅴ．　参考文献

『数学Ⅱ』　（三省堂）
『あなたの数学　基礎解析』
上田三郎　監修（麦の芽出版）
『遠山啓のコペルニクスからニュートンまで』
遠山啓　（太郎次郎社）
『数学入門　下』遠山啓　（岩波新書）
『13 歳の娘に語るアルキメデスの無限小』
金 重明（岩波書店）
『忘れてしまった高校の微分積分を復習する本』
浅見　尚（中経出版）