

女子部中等科 1 年 数学

「平面図形」

伊藤洋美 鈴木雄紀 長左絵

平面図形について、3つのグループに分かれて学びを深めました。

グループ1は「タイルばり」です。平面を有限種類の図形で隙間なく敷き詰めることを、「タイルばり」とか「平面充填」と言います。「どんな図形がタイルばりできるのか」という素朴な疑問からはじめ、様々な問いを立て、実際に皆で手と頭を動かしながらその答えを検証してきました。

グループ2は「はとめ返し」です。はとめ返しとは三角形や四角形などの図形を、ある約束にしたがって4つの多角形に分割し、ばらばらにならないようにはとめを打ってひもで結びます。4つの頂点が中央に集まるように真ん中からぐるりと裏返すとどんな図形が現れるか、これがはとめ返しという図形パズルです。四角形を面積が等しい別の四角形に、また三角形、五角形や六角形、七角形にも変形できるかなど、問題を発展させながら、試行錯誤して確かめていきました。

グループ3は「三角形の五心」です。教科書に載っている垂直二等分線や垂線、角の二等分線の作図方法を使って、「外心」「内心」「重心」「垂心」「傍心」の作図や性質を学びました。その後、身近なものを使って工作や実験を行い、それぞれの性質を可視化することを試みました。

教科書の内容を超えて、遊びの中に潜む数学の学びを報告しました。

I. 報告会までの学習

中等科1年生の数学は、1学期に正負の数、文字式、1次方程式を学び、2学期以降は比例と反比例、平面図形、空間図形について学びました。

平面図形に入る前に、まず夏休みに家紋を調べてくるといふ宿題を出して、小学校で学習した線対称、点対称の内容の復習を試みました。6年生で学習した内容で忘れていた人もいましたが、丁寧な図を描いてきた人が多く、それぞれ対称軸や中心、回転角を求めてみました。

平面図形の学習内容は平面図形の基礎である直線や角、円について学んだ後、たこ形やひし形の性質を根拠にして垂直二等分線や垂線、角の二等分線の作図方法を理解し、定規とコンパスを使って作図しました。それらの作図を利用して、円の中心を求めることや、円の接線を作図すること、30度、75度、135度の角の作図する方法をいろいろ考え、なぜその方法で作図できるかを説明し合う機会をもちました。

また垂直二等分線や角の二等分線の性質を理解した後、水くみの最短コースを求めたり、地図を見ながら家の位置を決めていくなどの問題を考え、それらの性質を活用して見つけることができる理由を考えました。

図形の移動は、平行移動、回転移動、対称移動の意味を理解し、図形をどのように動かしたか、言葉で相手に正確に伝える活動を大切にしました。応用として2回、3回と移動の回数を増やした場合も考えることで、移動の組み合わせにより、平面図形は任意の位置に移動することができることを理解しました。

これらの活動を通して図形に慣れてから、全体に向けて「タイルばり」、「はとめ返し」、「三角形の五心」について2時間ずつ手作業を含めた授業を行い、自分の興味・関心を持てるグループを1つ選び、グループごとに分かれてそのテーマを深めていくことにしました。

II. グループ1「タイルばり」

グループに分かれる前の、全体での2時間の授業では、タイルばりのルールを学び、タイルばりできる図形とで

きない図形について、折り紙を切って図形をつくって実際に並べながら確認していきました。正多角形からはじめ、その結果を踏まえ、問いと予想を立てながら、タイルばかりできる図形とできない図形を分類していきました。

またタイルばかりを行う際の並べ方についても、形によって、1つの図形の位置を決めると他の図形の配置も一意に決まるものと、回転や平行移動ができ、並べ方にある程度の自由度があるものがあることを確認しました。

報告会へ向けては、グループの中で4つのテーマを立て、小グループに分かれて取り組みました。テーマは次の①～④の通りです。いずれのテーマについても、文献を参考にするのは定義等を参照する場合のみとして、自ら手を動かし、考察することを大切にしながら取り組みました。

① タイルばかりできる図形とできない図形

多角形の任意の2点を結ぶ線分が、多角形の内部に含まれるとき、その多角形を凸多角形といいます。タイルばかりができるかできないか、凸多角形と凸でない多角形に分けて調べました。

凸多角形では、三角形、四角形はすべての図形がタイルばかりできますが、五角形、六角形ではタイルばかりできない図形があり、七角形以上の図形はタイルばかりできないと結論付けました。タイルばかり可能な凸五角形は何種類あるかという問題はタイルばかりの問題の中でも有名ですが、今回の取り組みでもタイルばかりできる凸五角形の例を複数種類見つけることができました。

凸でない多角形についてはかなりの自由度があり、沢山のタイルばかり可能な図形の例を見つけました。

② タイルばかりできる図形の並べ方

正方形のタイルは、1つのタイルを90度、180度、270度回転させても他のタイルの並びに影響することはありません。ところが、長方形のタイルでは、できる回転は180度のみです。タイルばかりできる各図形について、回転と平行移動の可能性を調べ、正方形のタイルがもっとも並べ方の自由度があり、一般の四角形では並べ方の自由度が低いことを確認しました。このことから、身の回りにあるタイルやブロックには、正方形や長

方形が多く用いられているのではないかと考察しました。

③ 2種類以上の図形を使ったタイルばかり

1種類ではタイルばかりできない図形も、複数組み合わせれば、タイルばかりができるのではないかとという疑問をもとに、タイルばかりできるパターンを探しました。例えば、正五角形はそれだけではタイルばかりできませんが、ひし形と組み合わせるとタイルばかり可能です。このような例をいくつか見つけました。

④ 学園内で見つけたタイルばかり

学園内を歩き回り、道や壁、網などタイルばかりが使われたものやデザインを探しました。また、②での「実際のタイルばかりには正方形や長方形が多い」ということが実際にも成り立っていることを確認しました。

本グループは、計算や証明はほとんどせず、数学に対して苦手意識を感じている人でも興味を持って取り組めるように学習を進めてきました。すぐに先行研究を調べるのではなく、自ら疑問を出し、自分の手と頭を使って結論を導き出すこと、わかったことを正確に表現することを心掛けながら学習を進めました。

Ⅲ. グループ2「はとめ返し」

最初の2時間は、男子部高田先生に「組み合わせパズルを作ってみよう」というタイトルで授業をしていただきました。まず正三角形を1つの頂点と対辺の中点を結んだ線分で半分に切って、四角形にしてみることに取り組みました。すると普段数学が苦手な生徒も平行四辺形やたこ形などいくつかの図形を作ることができました。その後、各自で一般の三角形を長方形、平行四辺形や一般の四角形に変形することや、長方形を二等辺三角形、直角三角形や一般の三角形に、一般の四角形を長方形、平行四辺形や面積が等しい別の四角形に変形するなどの課題に取り組みました。それらの課題では、中点に注目して切ってみることを意識させました。

一般の四角形から好きな形の図形を作る応用問題では、2組の対辺の中点どうしを結んだ2本の線分で四角形を4個に分割することや、1組の対辺の中点どうしを結んだ線分に、残りの辺の中点からそれぞれ垂線をおろしてみて4個に切り分けてみたり、内部の任意の1点と

各辺の中点を結んだ4本の線分で4個に分割するなど、いろいろ取り組む姿が見られました。

実際にそれぞれが好きな「はとめ返し」の図形パズルを1時間かけて作った後、いよいよ3つのグループに分かれることになり、グループ2は4人の生徒で取り組むことになりました。

生徒たちは「はとめ返し」の模型を作って皆の前でぐりりと裏返してみることを目標に、まず復習することから始めました。

今回の「はとめ返し」は一般の四角形の各辺の中点を利用して、四角形を4個に分割します。その4片がばらばらにならないように各辺の中点のところをはとめ(紐を通す穴に取りつける小さな金属の環)で留めます。その4片を真ん中から外側にひっくり返して裏返すと別の図形に変形する図形パズルですが、どのように切ればどのような図形が現れるかを考察し、報告しました。

***報告内容1**

- ① 一般の四角形を2本の線分(2組の対辺の中点どうしを結ぶ)で4個に切り分けることで、平行四辺形を作る。
- ② 一般の四角形を3本の線分(1組の対辺の中点どうしを結んだ線分に、残りの辺の中点からそれぞれ垂線2本をおろす)で4個に切り分けることで、長方形を作る。
- ③ ①②から60度の対角を持つ平行四辺形を作るにはどのように切ればよいか。

③は一般の四角形を1組の対辺の中点どうしを結んだ線分に、残りの辺の2個の中点から60度の角の平行線を引いて作ることができました。これらの図形ができたことを説明するために小学校で学習した四角形の性質を振り返りました。

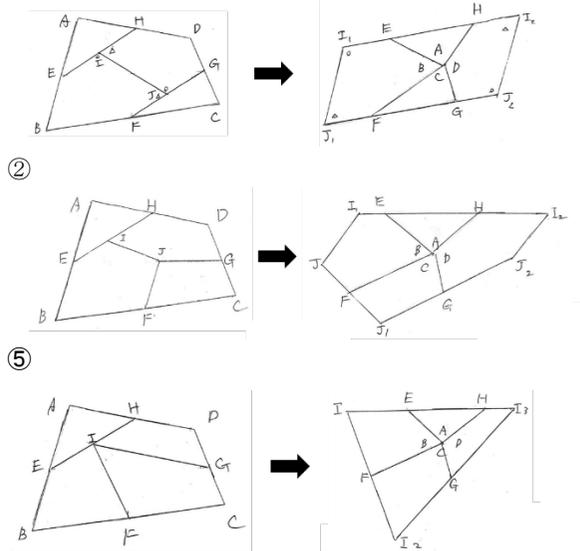
次に四角形の対辺の中点どうしを結ぶのではなく、隣り合う辺の中点どうしを結ぶとどうなるかを考えることにしました。

***報告内容2**

- ① 一般の四角形を2本の線分(隣り合う辺の中点どうしを結ぶ)と、その線分の任意の点どうしを結ぶ線分で4個に切り分けることで、平行四

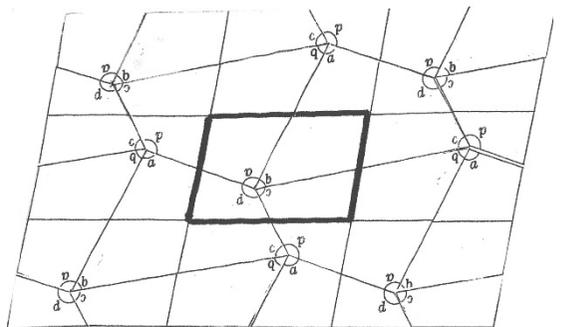
角を作る。

- ② 一般の四角形から、五角形はできるか。
 - ③ 一般の四角形から、六角形はできるか。
 - ④ 一般の四角形から、七角形はできるか。
 - ⑤ 一般の四角形から、三角形はできるか。
- 考察の結果は、下の図のようになりました。



①、②、③、⑤など六角形まではできましたが、④の七角形やそれ以上の多角形は凹多角形になってしまうという結論になりました。

最後に「タイルばり」の図には、もとの一般の四角形と「はとめ返し」後の図形がはっきりと現れていることもわかりました。



IV. グループ3「三角形の五心」

グループに分かれる前に、「外心」、「内心」、「重心」、

「垂心」、「傍心」の性質や作図の方法を学びました。基本性質を学んだあと、コマや塩を使った実験をして、その性質を観察しました。発表は、グループの中でさらに、「五心の説明」「塩の実験」「重心」「垂心、外心の関係」の4つに分かれて発表しました。

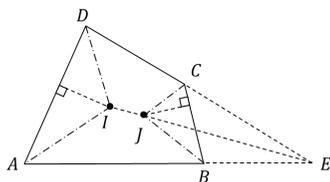
①五心について

内心（内接円）、外心（外接円）、重心、垂心、傍心（傍接円）を、定規と黒板用のコンパスを使って、ステージ正面に貼る大きな表を作成しました。発表では、その表を使って五心の説明をしました。

②塩の実験

任意の多角形の厚紙の上に塩の山を作ると、隣り合う辺から等距離のところに尾根ができることがわかっています。それを利用し、任意の三角形の厚紙に食塩をふりかけて山を作り、頂点が内心になっていることを観察しました。また、内接円がかける四角形と、内接円がかけない四角形にも塩をふりかけ、塩の山の頂上が何を表しているか観察しました。

内接円がかける四角形は、食塩をふりかけると、四角錐の山ができ、山頂の真下の点は、この四角錐の内接円の中心になりました。一方、内接円がかけない四角形は、食塩をふりかけると、2つの頂上ができました。塩の山は隣り合う辺から等距離のところに尾根ができることから、下の図のように、点Iが三角形ADEの内心、点Jが三角形CBEの傍心であることを確認しました。



③重心

グループに分かれる前の授業で、厚紙に自分の好きな三角形をかき、重心に楊枝をさして三角形のコマを作って回す実験をしました。そこで、重心は重さがつりあう点であることを確認しました。

この重心の性質を使ったものを考え、大きな三角形のモビールを作ることにしました。1辺が50cm以上ある三角形の重心に紐を通して、発表時にはステージの上から吊るしました。さらに、三角形の重心の作図を発展させ、三角形の重心の作図方法を利用した四角形の重心の

作図をしました。

④垂心と外心の関係

このグループでは、「三角形ABCに対して、AB, BC, CAの中点をそれぞれP, Q, Rとする。三角形ABCの外心と三角形PQRの垂心は一致する」ということについて、作図と証明の理解を試みました。

まず、作図を行い、三角形ABCの外心と三角形PQRの垂心は一致することを確認しました。次に証明を読んで、作図した図を使って発表できるように、理解を深めました。

V. 報告会を終えて

自分の興味にそって3つのグループに分かれ、更にそれぞれのグループの中でほしい4人ずつで調べたり考えたりして協力して学習しました。今回は32人の生徒に3人の教師が関わることで、生徒はただ参加すればよいということではなく、それぞれの意識や役割を明確に持つことになったと思います。皆がどのようなことに取り組んでいるかを全体で把握できるように、なるべく皆で取り組んだり考えたりする授業を多くとったつもりでした。それでも最後の1週間から10日間でそれぞれの担当に細分化されていき、全体の理解は難しくなりましたが、それぞれの教師が生徒と共に取り組むことで、数学の苦手な人も、得意な人もその力量と関心によって広がりのある、密度の濃い時間が過ごせたのではないかと思います。今回の報告会の学びの中で数学の面白さを少しでも味わうことができたなら、今後の数学への取り組みが、より自発的、主体的に学ぶ姿勢につながっていくことと期待しています。

VI. 参考文献

『本日オープン！数学美術館「平面図形」』

井上正充 国土社

『数理パズル』 中村義作他 中公新書